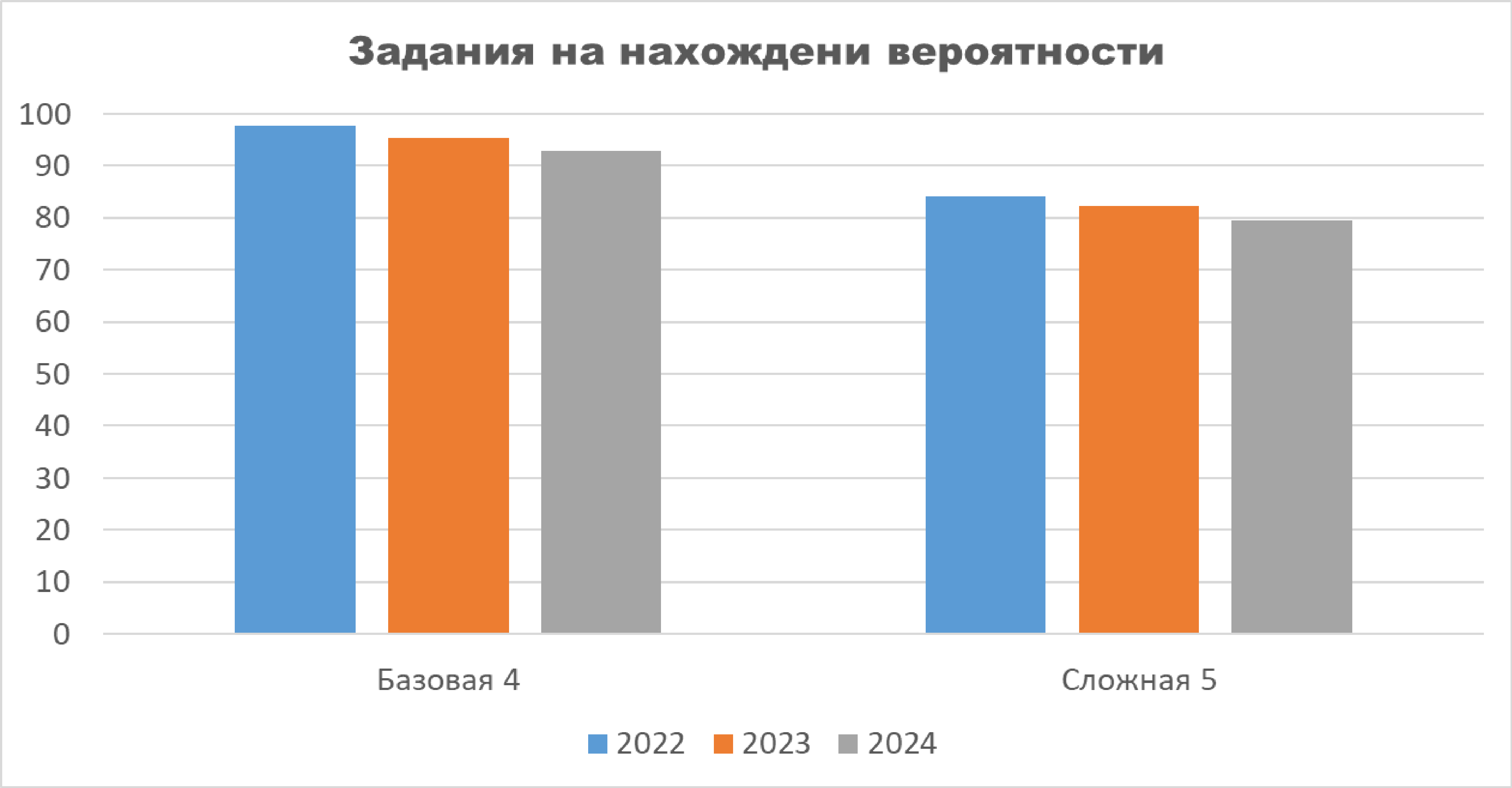
Решение задач по теории вероятностей

Сравнение результатов решения задач по теории вероятностей из материалов ЕГЭ за последние 3 года.

Задание 22 / 23 /24	2 / 3/ 4		10 / 4 /5	
	Количество решивших верно	%	Количество решивших верно	%
2022	2409	97,67	2120	84,19
2023	2208	95,30	1906	82,26
2024	2024	92,76	1737	79,61
Тема 2024	Вероятность базовая		Вероятность сложная	


Задания на нахождени вероятности
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
Базовая 4
Сложная 5
2022
2023
2024

Задание 4 (№2 2022 год)

В соревнованиях по толканию ядра участвуют спортсмены из четырёх стран: 6 из Швеции, 5 из Дании, 10 из Норвегии и 4 из Финляндии. Порядок, в котором выступают спортсмены определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий первым, окажется из Норвегии.

Задание 4 (№3 2023 год)

В чемпионате по гимнастике участвуют 60 спортсменок: 17 из США, 28 из Мексики, остальные – из Канады. Порядок, в котором выступают гимнастки определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Канады.

Задание 4 (№4 2024 год)

В группе туристов 40 человек. С помощью жребия они выбирают шесть человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

Классическое определение вероятности: вероятность события А равна отношению числа случаев, благоприятствующих ему, к общему числу случаев, т.е. $\mathrm{P(A)} = \boldsymbol{\frac{m}{n}}$

где Р(А) - вероятность события А;

m - число случаев, благоприятствующих событию А;

n - общее число случаев.

2022 год	2023 год	2024 год
n=6+5+10+4=25, **m=10** $\mathrm{P(A)} = \boldsymbol{\frac{10}{25} = 0,4}$	n=60, m=60-(17+28)=15 $\mathrm{P(A)} = \boldsymbol{\frac{15}{60} = 0,25}$	n=40, m=6 $\mathrm{P(A)} = \boldsymbol{\frac{6}{40} = 0,15}$

№1. В среднем из 1400 садовых насосов, поступивших в продажу, 7 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Решение. Всего n=1400 вопросов, не подтекает m=1400-7=1393.

Тогда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1393}{1400} = 0{,}995.$ Ответ: 0,995

Комментарий: Эту задачу можно решить используя вероятность противоположного события: $P(\overline{\mathbf{A}}) = \mathbf{1} - P(A)$

Решение. Всего n=1400 вопросов, подтекает m=7.Тогда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{7}{1400} = 0{,}005.$

Нашли вероятность, что насос подтекает. Тогда найти вероятность того, что выбранный насос не подтекает, можно по формуле: $P(\overline{\mathbf{A}}) = \mathbf{1} - P(A) = 1 - 0{,}005 = 0{,}995.$

Комментарий: В этой задаче может быть задано найти вероятность того, что насос подтекает.

№2. Фабрика выпускает сумки. В среднем 8 сумок из 100 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов.

Решение. Всего n=100 сумок, с дефектами *k*=8, без дефектов m=92 .

Тогда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{92}{100} = 0{,}92.$

Комментарий: похожая задача, но формулировка другая.

Фабрика выпускает сумки. В среднем на 100 качественных сумок приходится восемь сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

Решение. Всего n=100+8=108 сумок, с дефектами *k*=8, без дефектов m=100 .

Тогда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{100}{108} \approx 0{,}93.$

Задание 5 (№10   2022 год)

Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в две первые мишени и не попадёт в две последние.

Задание 5 (№4   2023 год)

Биатлонист 5 раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишень, а последние два раза промахнулся. Результат округлите до сотых.

Задание 5 (№5   2024 год)

Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в первую мишень и не попадёт в три последние.

2022 год	Вероятность попадания в мишень равна p=0,6, вероятность промаха $\overline{p} = 1 - p = 0{,}4$. Тогда вероятность того , что он первые 2 раза попал, а последние 2 раза промахнулся равна P=p*p*$\overline{p} * \overline{p} = 0{,}6^2 * 0{,}4^2$= 0,0576
2023 год	Вероятность попадания в мишень равна p=0,8, вероятность промаха $\overline{p} = 1 - p = 0{,}2$. Тогда вероятность того , что он первые 3 раза попал, а последние 2 раза промахнулся равна P=p*p*p*$\overline{p} * \overline{p} = 0{,}8^3 * 0{,}2^2$= 0,02048≈ 0,02
2024 год	Вероятность попадания в мишень равна p=0,8, вероятность промаха $\overline{p} = 1 - p = 0{,}2$. Тогда вероятность того , что он 1 раз попал, а последние 3 раза промахнулся равна P=p*$\overline{p}$*$\overline{p} * \overline{p} = 0{,}8 * 0{,}2^3$= 0,0064

№1. Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

Решение: Вероятность попадания в мишень равна p=0,8, вероятность промаха $\overline{\mathrm{p}} = 1 - \mathrm{p} = 0{,}2$. Тогда вероятность того , что он первые 3 раза попал, а последние 2 раза промахнулся равна

P=p*p*p*$\overline{\mathrm{p}} * \overline{\mathrm{p}} = 0{,}8^3 * 0{,}2^2$= 0,02048

№2. Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист три раза попал в мишени, а два промахнулся.

Решение. Т.к. биатлонист может попасть или не попасть в какую-то определенную мишень, то надо найти количество перестановок 3 попаданий из 5 мишеней. Для решения этой задачи воспользуемся формулой Бернулли.

Формула Бернулли: Теорема. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, то вероятность $\mathrm{P}_{m,n}$ того, что событие A наступит m раз в n независимых испытаниях,

равна $P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}$ **,** где q = 1 - p.

Вероятность попадания в мишень равна p=0,8, вероятность промаха $\overline{\mathrm{p}} = 1 - \mathrm{p} = 0{,}2$.

Тогда вероятность $P_{3,5} = C_5^3 p^3 q^{5-3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} * 0{,}8^3 * 0{,}2^2 = 10 * 0{,}02048 = 0{,}2048$

Ответ:0,2048.

Если к комплексу условий, при котором изучалась вероятность P(B), добавить новое условие A, то полученная вероятность события B, найденная при условии, что событие A произошло, называется **условной вероятностью события** B и обозначается $P_A(B)$, или P(B/A), или P(B1A).

Теорема (правило) умножения вероятностей: Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое событие произошло.

$$\mathbf{P\,(AB) = P\,(A) \cdot P_A(B) = P\,(B) \cdot P_B(A).}$$

№ 1. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая – 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая – 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Решение:

	Вероятность выпуска продукции фабрикой	**Вероятность брака**	**Условная вероятность**
I	P(A1) =0,45	$P_{A1}(B)$ =0,03	P (A1) · $P_{A1}(B)$= 0,45*0,03=0,0135
II	P(A2) =0,55	$P_{A2}(B)$= 0,01	P (A2) · $P_{A2}(B)$= 0,55*0,01= 0,0055
			Итого: 0,0135+0,0055=0,019

№2. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется *положительным*. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 5% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

Решение:

	Здоров или болен	Вероятность полож.анализа	Условная вероятность
З	P(A1) =1 – 0,05=0,95	$P_{A1}(B)=0{,}01$	$P(A1) \cdot P_{A1}(B)=0{,}95*0{,}01=0{,}0095$
Б	P(A2) =0,05	$P_{A2}(B)=0{,}9$	$P(A2) \cdot P_{A2}(B)=0{,}05*0{,}9=0{,}0450$
			Итого: 0,0095+0,0450=0,0545

№3. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Решение:

	Качество батарейки	Вероятность забраковки	Условная вероятность
Хорошая	$P(A1) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$	$P_{A1}(B) = 0{,}01$	$P(A1) \cdot P_{A1}(B) = 0{,}98 * 0{,}01 = 0{,}0098$
Брак	$P(A2) = 0{,}02$	$P_{A2}(B) = 0{,}99$	$P(A2) \cdot P_{A2}(B) = 0{,}02 * 0{,}99 = 0{,}0198$
			Итого: $0{,}0098 + 0{,}0198 = 0{,}0296$

№4. При подозрении на наличие некоторого заболевания пациента отправляют на ПЦР-тест. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в 91% случаев. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в среднем в 93% случаев. Известно, что в среднем тест оказывается положительным у 10% пациентов, направленных на тестирование. При обследовании некоторого пациента врач направил его на ПЦР-тест, который оказался положительным. Какова вероятность того, что пациент действительно имеет это заболевание?

Решение. Пусть x — число больных пациентов и y — число здоровых. Тогда всего имеется $x+y$ пациентов. Общее число положительных ПЦР-тестов по условию равно $0{,}1(x+y)$, из которых $0{,}91x$ тестов приходится на больных пациентов и $0{,}07y$ тестов — на здоровых. Тогда $0{,}91x+0{,}07y=0{,}1(x+y) \Rightarrow y=27x$

Поэтому вероятность того, что положительный ПЦР-тест был взят у больного пациента, равна $\frac{0{,}91x}{0{,}1(x+y)} = \frac{0{,}91x}{0{,}1 * 28x} = 0{,}325$

	Больные или здоровые	Вероятность положит.анализа
Б	Х	0,91Х
З	У	(1-0,93)У
всего	Х+У	0,1(Х+У)

$$\boldsymbol{m = 0,91X,}$$

$$\boldsymbol{n = 0,1(X + Y)}$$

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}} = \frac{\mathbf{0{,}91}\boldsymbol{X}}{\mathbf{2{,}8}\boldsymbol{X}} = \mathbf{0,325}$$

Рассмотрим две задачи, которые похожи по тексту, но разные.

№ 5. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Обслуживание автоматов происходит по вечерам после закрытия центра. Известно, что вероятность события «К вечеру в первом автомате закончится кофе» равна 0,35. Такая же вероятность события «К вечеру во втором автомате закончится кофе». Вероятность того, что кофе к вечеру закончится в обоих автоматах, равна 0,15. Найдите вероятность того, что к вечеру кофе останется в обоих автоматах.

Решение:

З **З** $P_1=0,15$	**О** **З** P_2
З **О** P_3	О О P_4

В таблице З – кофе закончится, О – кофе останется. Вероятность события «К вечеру в первом автомате закончится кофе» равна 0,35, Значит, $P_1+P_2=0,35$. Тогда $P_2=0,35-0,15= 0,2$. Вероятность события «К вечеру во втором автомате закончится кофе» равна тоже 0,35. Значит, $P_1+P_3=0,35$. Тогда $P_3=0,35-0,15= 0,2$.

Получаем, что $P_4=1 – (P_1+P_2+P_3)=0,45$

Решение. Рассмотрим события A – кофе закончится в первом автомате,

B – кофе закончится во втором автомате.

Тогда $A \cdot B$ – кофе закончится в обоих автоматах, $A + B$ – кофе закончится хотя бы в одном автомате.

По условию $P(A) = P(B) = 0{,}35$; $P(A \cdot B) = 0{,}15$.

События A и B совместные, **вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий, уменьшенной на вероятность их произведения:**

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 0{,}35 + 0{,}35 - 0{,}15 = 0{,}55.$$

Следовательно, вероятность противоположного события, состоящего в том, что кофе останется в обоих автоматах, равна $1 - 0{,}55 = 0{,}45$.

№6. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,06 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Решение: Вероятность P(A) события «хотя бы один автомат исправен» противоположно вероятности события P(B)*P(B) «Оба неисправны». Поэтому P(A)=1 – P(B)*P(B)= 0,9964.

Ответ: 0,9964

Спасибо за внимание.